UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
FACULTAD DE ODONTOLOGÍA
CURSO: FÍSICA MATEMÁTICA
DOCENTE: Dr. Edwin López
Año 2017
Documento de apoyo a la docencia

TRIGONOMETRÍA

1. ÁNGULO

Ángulo es la porción de plano determinada por dos semirrectas con origen común. Las semirrectas (**A** y **B**) que lo forman se denominan lados del ángulo y el punto común, se llama vértice (**V**). El ángulo (**θ**) lo constituye la apertura de sus lados. (Ver figura No. 1)

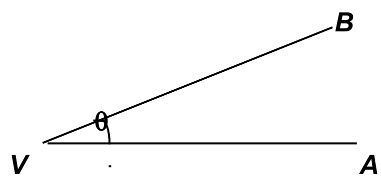


Figura No. 1

1.1. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS:

Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma como unidad. Hay varias unidades de medida para los ángulos, las más comunes son:

1.1.1. GRADO SEXAGESIMAL.

Esta unidad de medida se forma a partir de un ángulo central (θ), el cual tiene su vértice (**V**) en el centro (**O**) de una circunferencia. En el interior del ángulo se encuentra un arco (**A**) de la misma circunferencia. (Ver figura No. 2)

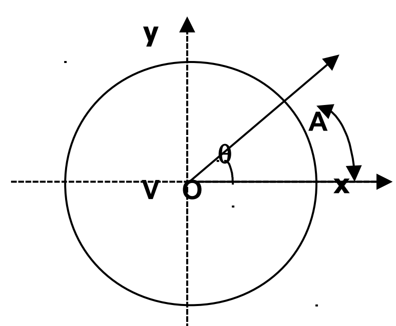


Figura No. 2

Si se divide la circunferencia en 360 arcos iguales, cada uno de esos arcos medirá un grado sexagesimal (1^0). Un ángulo de un grado es un ángulo central que contiene un arco de 1^0. Al medir ángulos en un sistema de coordenadas, el eje x, debe ser el punto de partida para dicha medición. Cuando la medición se realiza contraria a la dirección de las agujas del reloj, el valor del ángulo medido es positivo, pero si se realiza siguiendo las agujas del reloj, entonces el valor del ángulo es negativo. A continuación se muestran varios ángulos , medidos en grados sexagesimales en un sistema de coordenadas rectangulares. (Ver figuras No. 3 a la No. 6)

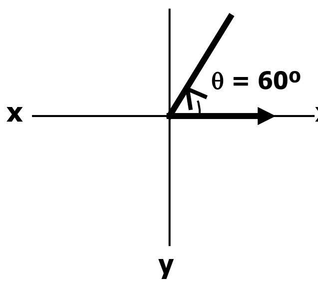


Figura No. 3

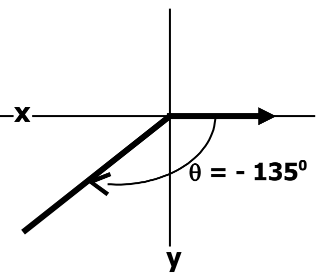


Figura No. 4

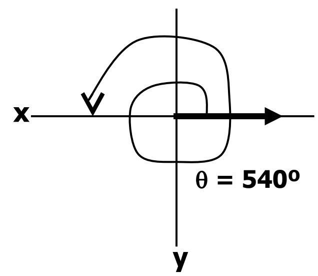


Figura No. 5

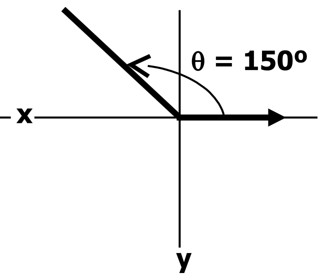


Figura No. 6

La notación **θ = 60º** es utilizada para especificar un ángulo **θ** cuya medida es de **60º**. También se usa la frase “un ángulo de 60º ” en vez de decir en forma más precisa, “ un ángulo con medida angular de 60º “.

Un grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales llamadas minutos (que se denotan con **’**) y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos (que se denotan con **”**). Entonces 1’ es 1/60 de hora y 1” es 1/60 de 1’, por ejemplo: una notación como **θ =** 73º 56’ 18” indica un ángulo **θ** que mide 73 grados, 56 minutos y 18 segundos.

A los ángulos comprendidos entre 0^0 y 90^0 (**0º < θ < 90º**), se les llama agudos y a los que están entre 90^0 y 180^0 (**90º < θ < 180º**), se les llama obtusos . Un ángulo de 90º se le llama ángulo recto. Dos ángulos agudos son complementarios si suman 90º, por ejemplo, 20º y 70º son ángulos complementarios. Dos ángulos positivos son suplementarios si suman 180º.

1.1.2. RADIÁN. Un radián (**rad**) es la medida de un ángulo central (**θ**) cuyo arco mide lo mismo que el radio (**r**) de la circunferencia. Toda circunferencia mide 2π radianes, es decir, mide 2π veces el radio. Un radián mide 57^0 17’ 45” sexagesimales. (Ver figura No. 7)

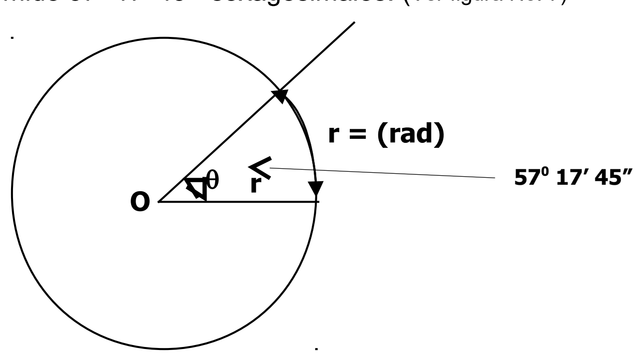


Figura No. 7

1.1.3. RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES. La relación que existe es:

$180^o = \pi$ radianes $1^o = (\pi / 180)$ radianes   1 radián = $(180 / \pi)^o$

Para cambiar radianes a grados se multiplica por $180 / \pi$ y para cambiar grados a radianes se multiplica por $\pi / 180$. Cuando se usa el valor de un ángulo en radianes, no suelen indicarse las unidades. Si un ángulo tiene una medida de 5 radianes, es usual escribir $\theta = 5$ en vez de $\theta = 5$ radianes.

❖ EJERCICIOS

- Dibuje el ángulo dado en posición normal.

  a. -60^0
  b. 240^0
  c. -150^0
  d. 510^0

- Exprese el ángulo dado en notación decimal.

  e. 15^0 19´ 28”
  f. 38^0 5´ 58”
  g. 135^0 25´ 35”

- Exprese el ángulo dado en términos de grados, minutos y segundos.

  h. 150.63^0
  i. 18.42^0
  j. 215.7^0

Angulos de un triángulo:

Los ángulos que se forman en un triángulo , se relaciona entre sí , siempre que cumpla con las siguientes propiedades o características:

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos, es decir suman 180°
2. La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°
3. En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos inernos contiguos (opuestos)

2. TRIGONOMETRÍA

La Trigonometría es una rama de la matemática que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Etimológicamente significa “medida de los triángulos”. Las primeras aplicaciones se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los cuales el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna. Se encuentran muchas aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio del flujo de corriente alterna. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son: la trigonometría esférica y plana. La trigonometría esférica se usa sobre todo en navegación y astronomía, estudia triángulos esféricos, es decir, figuras formadas por arcos de circunferencias máximas contenidos en la superficie de una esfera y la trigonometría plana se ocupa fundamentalmente de la resolución de triángulos planos. En este curso se estudiará solamente la resolución de triángulos rectángulos, ya que son los que tienen una mayor aplicación en el campo de la Odontología. Para ello se estudiará el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

2.1. TEOREMA DE PITÁGORAS

El Teorema de Pitágoras relaciona los tres lados de una triángulo rectángulo (Ver figura No. 8) y establece que el cuadrado del lado mayor (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (cateto opuesto y cateto adyacente). El teorema de Pitágoras permite calcular uno de los lados de un triángulo rectángulo si se conocen los otros dos.

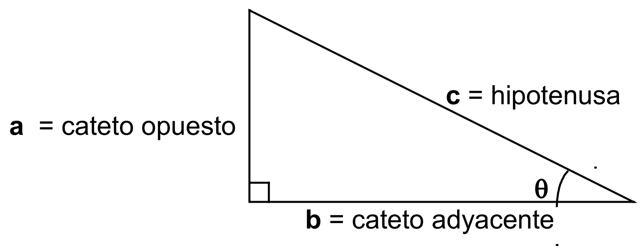
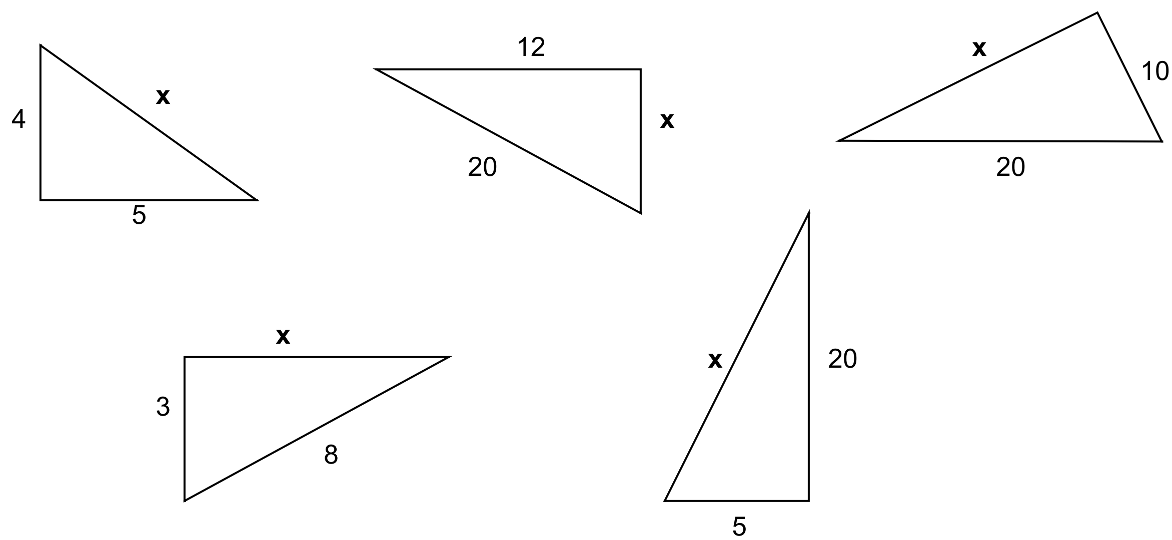


Figura No. 8

Si ***c*** es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo ***ABC*** y si ***a*** y ***b*** son las longitudes de los otros dos lados, el teorema establece simplemente que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **EJERCICIOS.** Colocar la simbología en cada uno de los triángulos y calcular las longitudes que se piden.



2.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS AGUDOS.

La base de la trigonometría está en las razones trigonométricas, que son valores numéricos asociados a cada ángulo, que permiten relacionar operativamente los ángulos y lados de los triángulos rectángulos. Un triángulo rectángulo es aquel que uno de sus ángulos es recto, o sea de 90°, tal como lo ilustra la figura No. 9:

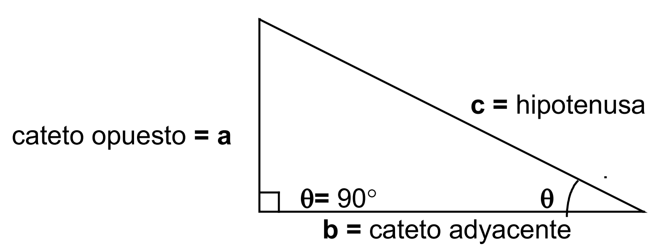


Figura No. 9

Utilizando la longitud de los tres lados del triángulo a, b y c, se pueden obtener seis razones, las cuales dependen del ángulo y no del tamaño del triángulo:

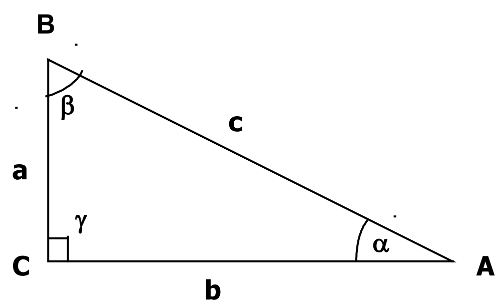
$$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} \qquad \frac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} \qquad \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Éstas razones son: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente y se abrevian, **sen**, **cos**, **tan**, **csc**, **sec** y **cot**, respectivamente. Las razones que serán utilizadas para este curso son: seno, coseno y tangente, las cuales pueden expresarse de la siguiente manera:

Sen θ = $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	**Cos θ = <u>Cateto adyacente</u>**	**tan θ = $\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$**

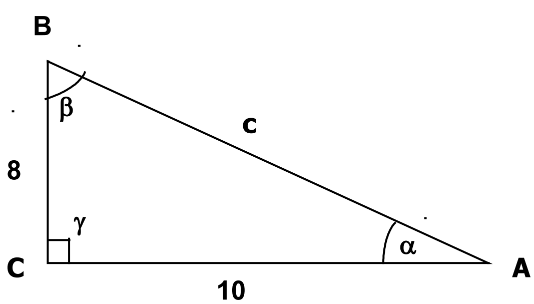
Para facilitar el cálculo de los triángulos rectángulos, se utilizará la siguiente notación: Los vértices de un triángulo se denotarán comúnmente ***A**, **B*** y ***C***. Los ángulos del triángulo en los vértices **A**, **B** y **C** se denotarán como α, β y γ, y las longitudes de los lados opuestos a estos ángulos con **a**, **b** y **c**, respectivamente. A menudo se designa al triángulo como triángulo **ABC**. Resolver un triángulo significa encontrar todas sus partes, esto es, la longitud de los tres lados y la medida de sus tres ángulos.



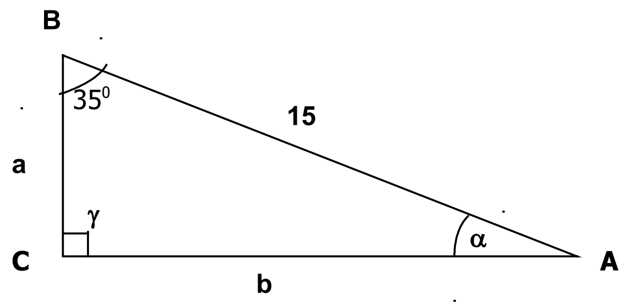
Nota importante: en un triángulo rectángulo, la hipotenusa se localiza opuesto al ángulo recto. Los catetos se nombrarán como opuesto o adyacente, dependiendo del ángulo de referencia.

❖ **EJERCICIOS.** Calcular las partes de los triángulos siguientes.

Ejercicio 1.



Ejercicio 2.



Ejercicio 3.